Universidad Autónoma de Madrid
Lógica Matemática — Ejemplos de teorías de primer orden

Ar: *La teoría de la Aritmética* en el lenguaje $L = \{S, +, \cdot, 0, <\}$:

Ar1: $\forall x\, Sx \neq 0$
Ar2: $\forall x \forall y (Sx = Sy \to x = y)$
Ar3: $\forall x\, x+0=x$
Ar4: $\forall x \forall y\; x+Sy=S(x+y)$
Ar5: $\forall x\, x \cdot 0=0$
Ar6: $\forall x \forall y\; x \cdot Sy=x \cdot y+x$
Ar7: $\forall x \neg\, x<0$
Ar8: $\forall x \forall y (x<Sy \leftrightarrow (x<y \vee x=y))$
Ar9: $\forall x \forall y (x<y \vee x=y \vee y<x)$

Grupos: *La teoría de grupos* en el lenguaje $L = \{\cdot, 1\}$:

G1: $\forall x \forall y \forall z\; x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$
G2: $\forall x (x \cdot 1=x \wedge 1 \cdot x=x)$
G3: $\forall x \exists y (x \cdot y=1 \wedge y \cdot x=1)$

GADST: *La teoría de grupos abelianos divisibles y sin torsión* en el lenguaje $L = \{+, 0\}$:

GADST1: $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$
GADST2: $\forall x (x + 0 = x)$
GADST3: $\forall y \exists x (x + y = 0)$
GADST4: $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
GADST5$_n$: $\forall x \exists y\, ny = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ (divisibilidad)
GADST6$_n$: $\forall x (x \neq 0 \to nx \neq 0)$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ (carencia de torsión)

Cuerpos: *La teoría de cuerpos* en el lenguaje $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$:

C1: $\forall x \forall y \forall z\; x+(y+z)=(x+y)+z$
C2: $\forall x (x+0=x \wedge 0+x=x)$
C3: $\forall x \exists y (x+y=0 \wedge y+x=0)$
C4: $\forall x \forall y\; x+y=y+x$
C5: $\forall x \forall y \forall z\; x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$
C6: $\forall x\, x \cdot 1=x$
C7: $\forall x (x \neq 0 \to \exists y\, x \cdot y=1)$
C8: $\forall x \forall y\; x \cdot y=y \cdot x$
C9: $\forall x \forall y \forall z\; x \cdot (y+z)=x \cdot y+x \cdot z$
C10: $0 \neq 1$

OL: *La teoría de órdenes lineales* en el lenguaje $L = \{<\}$:

OL1: $\forall x \neg\, x<x$
OL2: $\forall x \forall y ((x<y \wedge y<z) \to x<z)$
OL3: $\forall x \forall y (x<y \vee x=y \vee x<y)$

GADST1: $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$
GADST2: $\forall x (x + 0 = x)$
GADST3: $\forall y \exists x (x + y = 0)$
GADST4: $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
GADST5$_n$: $\forall x \exists y\, ny = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ (divisibilidad)
GADST6$_n$: $\forall x (x \neq 0 \to nx \neq 0)$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ (carencia de torsión)

OLDSE: *La teoría de órdenes lineales densos sin extremos* en el lenguaje $L = \{<\}$.

OLDSE1 Irreflexiva: $\forall x (\neg x < x)$
OLDSE2 Transitiva: $\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \to x < z)$

OLDSE3 Tricotómica: $\forall x\forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$
OLDSE4 Densidad: $\forall x\forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$
OLDSE5 Sin extremos: $\forall x\exists y\exists z(x < y \wedge z < x)$

CUERPOS$_p$: *La teoría de cuerpos de característica* p en el lenguaje $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$:
- Las fórmulas C1–C10 de la teoría de cuerpos
- C_p: $p\,1 = 0$ (característica p)

CUERPOS$_0$: *La teoría de cuerpos de característica* 0 en el lenguaje $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$:
- Las fórmulas C1–C10 de la teoría de cuerpos
- Para cada p primo $\neg C_p : p\,1 \neq 0$

CAC: *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados* en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$:
- Las fórmulas C1–C10 de la teoría de cuerpos
- Para cada $n \geq 1$, $R_n : \forall x_0, \dots \forall x_{n-1}\exists y(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + x_{n-2} \cdot y^{n-2} + \cdots + x_0 = 0)$

  (Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz)

CAC$_p$: *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica* p en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$: CAC $\cup\{\mathrm{C}_p\}$

CAC$_0$: *La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica* 0 en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$: CAC $\cup\{\neg C_p :\ p \text{ primo}\}$

CRC: *La teoría de cuerpos realmente cerrados* en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.
- Los axiomas C1–C10 (cuerpo)
- R1: $\forall x\exists y(y^2 = x \vee y^2 + x = 0)$
- Para cada n impar, $R_n : \forall x_0, \dots, \forall x_{n-1}\exists y(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + x_{n-2} \cdot y^{n-2} + \cdots + x_0 = 0)$

  (Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz)
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, R2$_n$: $\forall x_0 \dots \forall x_n(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \to (x_0 = 0 \wedge x_1 = 0 \cdots \wedge x_n = 0))$

CO: *La teoría de cuerpos ordenados* en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$.
- Los axiomas C1–C10 (cuerpo)
- Los axiomas O1–O3 (orden lineal)
- CO1: $\forall x\forall y\forall z(x < y \to x + z < y + z)$
- CO2: $\forall x\forall y\forall z((x < y \wedge 0 < z) \to x \cdot z < y \cdot z)$

CORC: *La teoría de cuerpos ordenados realmente cerrados* en el lenguaje $L = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$.
- Los axiomas de CO (cuerpo ordenado)
- $R3 : \forall x(0 < x \to \exists y(y \neq 0 \wedge y^2 = x))$
- Los axiomas R_n, para cada n impar (realmente cerrado)

ZFC: *La teoría de conjuntos (de Zermelo–Fränkel)* en el lenguaje $L = \{\in\}$.

ZFC 1: Axioma de extensión: $\forall x\forall y(\forall w(w \in x \leftrightarrow w \in y) \to x = y)$
ZFC 2: Axioma-esquema de compresión: para cada $F[w, y, w_1, \dots, w_n] \in \mathcal{F}or(L)$,

$$\forall y\forall w_1, \dots, \forall w_n\exists z\forall w(w \in z \leftrightarrow (w \in y \wedge F))$$

ZFC 3: Axioma del par: $\forall x\forall y\exists z\forall w(w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$
ZFC 4: Axioma de la unión: $\forall x\exists z\forall w(w \in z \leftrightarrow \exists y(w \in y \wedge y \in x))$
ZFC 5: Axioma-esquema de remplazamiento: para cada $F[x, y, w, w_1, \dots, w_n] \in \mathcal{F}or(L)$,

$$\forall w\forall w_1, \dots, \forall w_n(\forall x \in w\exists! yF \to \exists z\forall x \in w\exists y \in z\, F)$$

ZFC 6: Axioma de infinitud: $\exists z(0 \in z \wedge\ \forall y(y \in z \to y \cup \{y\} \in z))$
ZFC 7: Axioma de las partes: $\forall x\exists z\forall w(w \in z \leftrightarrow w \subset x)$
ZFC 8: Axioma de regularidad: $\forall x(\exists yy \in x \to \exists z(z \in x \wedge \neg\exists w(w \in x \wedge w \in z)))$.
ZFC 9: Axioma de elección: $\forall x\exists z(z \text{ bien ordena } x)$